

Economia Aziendale Online[©]

N. 5/2008

“Riflessioni sul modello di ottimizzazione dei cost driver di Babad e Balachandran”

Luigi Guardamagna – Anna M. Moisello

Economia Aziendale Online[©]
International Business Review
Editor in Chief: Piero Mella
ISSN 1826-4719
Reg. Trib. Pavia - n. 685/2007 R.S.P.

Pavia, December, 2008
No. 5/2008

All the contents are protected by copyright.
No part can be copied without the Editor in Chief's and Author's permission.
Further information at: www.ea2000.it

Riflessioni sul modello di ottimizzazione dei cost driver di Babad e Balachandran

Luigi Guardamagna

Anna M. Moisello

Dipartimento di Ricerche Aziendali - Facoltà di Economia – Università di Pavia
Via S. Felice 7, 27100, Pavia (PV) – Tel. 0382 986247 - Fax (ufficio).0382 986228

Email: amoisello@eco.unipv.it

Sommario – 1. La rilevanza della scelta dei driver di costo nel modello ABC – 2. Un modello di selezione dei driver con pesatura dei prodotti – 3. Il modello di Babad e Balachandran – 4. Il valore da ottimizzare e la funzione dei pesi w_i – 5. La pesatura di un solo prodotto: confronto di coppie di funzioni di trade-off – 6. Un procedimento per la scelta effettiva del valore di ponderazione per un solo prodotto – 7. Osservazioni conclusive sul processo di pesatura – 8. Conclusioni

Abstract

Cost drivers selection is a crucial decision in the construction of an activity based cost accounting model. The accuracy of the cost measures and the usability of the model depend on it. Cost drivers selection implies the consideration of the cost of the measurement, the degree of correlation and the behavioral effects induced by the choice. Some studies on the theme face the problem with mathematical models of optimization, among them the model of Babad and Balachandran is of particular interest. The aim of the paper is to offer some critical considerations about the Babad and Balachandran's model for cost driver selection and application to the activity based costing.

1 – La rilevanza della scelta dei driver di costo nel modello ABC

L'*activity based costing* nasce in risposta all'esigenza di disporre di modelli di *costing* accurati (Johnson e Kaplan, 1987) e si caratterizza come modello focalizzato sui fattori generatori dei costi indiretti, capace di esprimere in modo più oggettivo - rispetto a metodologie tradizionali volte all'utilizzo esclusivo di basi volumetriche - la relazione di causalità che lega prodotti e costi (Cooper e Kaplan, 1988; Cooper, 1999). I punti di forza della metodologia consistono nell'osservare i prodotti come il risultato della combinazione di attività diverse, per tipologia e intensità di utilizzo, e nell'attribuire i loro costi ai prodotti mediante un'ampia varietà di *cost driver*, il cui consumo è espressione dell'utilizzo delle attività medesime. Particolare delicatezza assume pertanto, nell'ambito della costruzione di un modello ABC, la scelta dei *cost driver*, sia dal punto di vista della tipologia, sia della numerosità dei medesimi.

Il processo di selezione dei *cost driver* si compone di due aspetti strettamente collegati, che sono sia la decisione circa il numero di *cost driver* e la individuazione dei parametri che meglio esprimono il consumo delle risorse da parte delle attività, *resource driver*, sia il consumo delle attività da parte degli oggetti di costo finali, *activity driver*.

La decisione sulla numerosità dei *cost driver* dipende dal livello di accuratezza richiesto in relazione all'obiettivo del calcolo dei costi e dal grado di complessità dei processi da cui promanano le produzioni che sono oggetto di costo. La numerosità dei *cost driver* dipende dal *trade-off* tra la scelta di un modello con un alto livello di accuratezza derivante da un elevato numero di *driver*, a cui si accompagnano elevati costi di misurazione e pesantezza di gestione, contro modelli con una accuratezza inferiore dovuta ad un numero di *driver* contenuto, ma con minori costi di misurazione e maggiore efficacia di utilizzo. La numerosità degli *activity driver* dipende dal livello di aggregazione con cui le attività vengono rappresentate nel modello e questa, a sua volta, dipende dalle caratteristiche di omogeneità e proporzionalità riscontrate tra i costi delle medesime attività.

La selezione dei *cost driver* tiene conto di tre criteri (Cooper, 1989): il contenimento del costo della misurazione, la verifica del grado di correlazione, il controllo degli effetti comportamentali.

In generale, la scelta dei *driver* è volta a rendere minimo il costo di misurazione. Poiché la dimensione del costo di misurazione dipende dalla difficoltà di rilevazione dei valori assunti dai *driver* si cerca di utilizzare *driver* per i quali siano già disponibili le informazioni e in luogo di utilizzare parametri che misurano direttamente il consumo di un'attività si utilizzano indicatori indiretti, quando i servizi misurati dal parametro indiretto risultano omogenei rispetto agli oggetti di costo. Un esempio può essere dato dall'attività di fatturazione: il *driver* diretto è dato dal tempo impiegato nell'attività, mentre quello indiretto dal numero di fatture, nel caso in cui ci sia omogeneità nei tempi impiegati nell'elaborazione delle diverse fatture.

L'utilizzo di *driver* indiretti del costo di un'attività implica la verifica del grado di correlazione tra l'andamento della misura del *driver* e la dinamica del costo dell'attività medesima. Il grado di correlazione adeguato cresce all'aumentare del peso relativo dell'attività sulla struttura di costo. Infatti al crescere del peso relativo dell'attività aumenta la distorsione dovuta alla non corretta attribuzione del costo e, quindi, il costo dell'errore assume maggiore rilevanza. Poiché i servizi resi dalle attività sono disomogenei, è raro verificare una perfetta correlazione tra parametri che misurano le transazioni e l'effettivo consumo dell'attività. Si pensi ad esempio all'utilizzo del numero di progetti come *driver* per l'attività di progettazione: questa potrebbe avere intensità diversa a seconda dei singoli progetti e giustificare pertanto il ricorso ad un'imputazione multipla basata su più di un *driver*.

L'ultimo fenomeno rilevante nella scelta di un *cost driver* è dato dall'effetto comportamentale che si manifesta quando gli individui, che hanno la responsabilità delle diverse attività, riten-

gono che la valutazione della propria *performance* dipenda dal valore rilevato in relazione al consumo di quel *driver*. Il fatto che la scelta di un determinato *driver* possa modificare il comportamento degli operatori deve essere considerato in modo duplice. Da un lato, infatti, il *driver* può essere utilizzato come strumento per indurre comportamenti coerenti con gli obiettivi dell'impresa, ma dall'altro può generare comportamenti che vanno nella direzione opposta. Ciò equivale a dire che gli effetti comportamentali nell'utilizzo del *driver* possono generare sia costi sia benefici che devono essere opportunamente valutati.

La scelta dei *driver* dipende dall'interazione tra i tre fenomeni citati e viene effettuata perciò con metodologie basate sull'applicazione di regole operative che portino a ridurre il costo della misurazione dei *driver*, a scegliere *driver* il cui andamento è correlato alle dinamiche dei costi delle attività, tenendo conto degli effetti comportamentali indotti dalla scelta (Cooper, 1988; Cooper e Turney, 1988; Turney, 1992).

Studi sul tema propongono di supportare il processo con modelli matematici atti a ottimizzare la selezione.

2 – Un modello di selezione dei driver con pesatura dei prodotti

Questa nota sviluppa principalmente considerazioni sulla modalità di selezione dei *driver* proposta da Babad e Balachandran (Babad e Balachandran, 1993), che assume la rilevanza dei prodotti come un criterio importante per la determinazione del *trade-off* tra accuratezza e costi di misurazione. Secondo gli autori, modelli di attribuzione dei costi che consentano di concentrare l'attenzione sui prodotti prioritari o strategici, utilizzando un processo di attribuzione di pesi ai prodotti, possono giocare un ruolo rilevante nel processo decisionale d'impresa.

Nel loro modello questi autori, dopo aver sottolineato l'importanza cruciale dei pesi (p. 569), indicano che, per le modalità di formulazione dell'algorithmo sviluppato, ai prodotti con maggiore rilevanza deve essere dato un peso relativamente inferiore rispetto ai restanti; quando invece tale distinzione fra i prodotti non può essere giustificata, viene suggerito di attribuire ai prodotti pesi uguali. Al di là di queste generiche indicazioni peraltro gli autori non danno chiarimenti ulteriori sul processo di pesatura, ossia di quale entità debbano essere i pesi e quali siano le conseguenze della loro attribuzione ai prodotti, anche se qualche indicazione è ricavabile dall'esempio numerico da essi utilizzato, che è derivato da Cooper (1988).

Pur concentrando l'attenzione sulla pesatura dei prodotti, le considerazioni sviluppate non trascurano l'analisi della significatività del valore assunto nel modello come essenziale ai fini del *trade-off* tra accuratezza e costi di misurazione ai fini della selezione ottimale dei *driver*, poiché tale valore rappresenta il nucleo centrale della proposta di Babad e Balachandran.

Questa nota si pone l'obiettivo di riflettere sui seguenti punti:

- I. se il valore che il modello assume come entità da massimizzare, che formalmente appare come un “risparmio”, sia una grandezza significativa dal punto di vista economico aziendale;
- II. se l'introduzione del processo di pesatura e l'attribuzione, con modalità razionali, di valori ai pesi comporti un aumento di complessità giustificabile del processo di selezione dei *driver*.

Per dare una risposta a tali domande è necessario esaminare anzitutto il modello di Babad e Balachandran, ed è opportuno accompagnarne la delineazione con l'utilizzo del medesimo esempio numerico proposto dagli autori.

3 – Il modello di Babad e Balachandran

In un sistema ABC caratterizzato da P_i prodotti, $P_i \in P$ con $1 \leq i \leq I$, da A_j attività, $A_j \in A$ con $1 \leq j \leq J$, da D_j costi, $D_j \in D$ con $1 \leq j \leq J$, in cui D_j è il costo associato alla attività A_j , e da E_j *cost driver*, $E_j \in E$ con $1 \leq j \leq J$ rappresentativi delle attività, per la raccolta e gestione dell'informazione di ogni *driver* E_j si sostiene un costo pari a C_j .¹

L'eliminazione di un *driver*, accompagnata dall'accorpamento del costo dell'attività rappresentata da questo *driver* con quello di un'altra attività, genera una perdita di accuratezza a cui si contrappone un risparmio rappresentato dall'eliminazione dei costi di informazione di tale *driver*.

Il modello di Babad e Balachandran mira a ricercare un bilanciamento tra accuratezza (tanto maggiore quanto più alto è il numero delle attività e dei relativi *driver*) e costo della raccolta e gestione delle informazioni individuando il numero ottimale di *cost driver* da utilizzare.

Più analiticamente, se \bar{V}_{ij} è il volume, frequenza assoluta, di utilizzo del *cost driver* E_j da parte del prodotto P_i , la frequenza relativa di utilizzo V_{ij} è:

$$V_{ij} = \frac{\bar{V}_{ij}}{\sum_{i=1}^I \bar{V}_{ij}}.$$

Il costo totale U_i di P_i è ottenuto come segue:

$$U_i = \sum_{j=1}^J D_j \frac{\bar{V}_{ij}}{\sum_{i=1}^I \bar{V}_{ij}} = \sum_{j=1}^J D_j V_{ij}. \quad [1]$$

Dati due generici *driver* E_k ed E_m , si elimini il *driver* E_k ed i costi D_k dell'attività A_k , di cui il *driver* E_k è rappresentativo, siano sommati nei costi dell'attività A_m , cioè in D_m . Se la somma $D_k + D_m$ è ripartita sui prodotti utilizzando il *driver* E_m rimanente, il decremento di accuratezza che si genera, relativamente ad un generico prodotto P_i viene espresso dagli autori del modello come

¹ Nella esposizione del modello di Babad e Balachandran si è mantenuta la notazione degli indici usati dagli autori.

differenza tra il costo U_i di P_i calcolato utilizzando tutti i J cost driver, e il costo $U_i^{k,m}$ del prodotto determinato utilizzando $J-1$ cost driver, che viene definito dalla seguente relazione:

$$U_i^{k,m} = \sum_{j \neq k,m} D_j V_{ij} + (D_k + D_m) V_{im} = U_i + D_k V_{im} - D_k V_{ik} = U_i + D_k (V_{im} - V_{ik}) \quad [2]$$

ottenendo:

$$U_i - U_i^{k,m} = U_i - U_i - D_k (V_{im} - V_{ik}) = D_k (V_{ik} - V_{im}). \quad [3]$$

La differenza $U_i - U_i^{k,m}$, chiamata “accuratezza”, rappresenta quindi la variazione di precisione o se si vuole la distorsione dovuta alla sostituzione del driver E_k con E_m (sostituzione k,m) per P_i .

La differenza $U_i - U_i^{k,m}$ può essere positiva o negativa a seconda che la sostituzione k,m sovrastimi o sottostimi il costo del prodotto i -esimo, oppure nulla quando i volumi di utilizzo siano identici per tutti i prodotti, ossia i due driver siano perfettamente correlati. Naturalmente la somma degli scarti (distorsioni) è uguale a zero, quindi la somma dei costi dei prodotti coincide sempre con il costo di produzione. Per questo motivo gli autori utilizzano come misura della distorsione per il prodotto i -esimo in luogo dello scarto semplice, $U_i - U_i^{k,m}$, la radice quadrata dello scarto quadratico $\sqrt{(U_i - U_i^{k,m})^2}$, che chiamano “distanza” del prodotto i -esimo per la sostituzione k,m e a cui ci si riferirà anche come errore o distorsione indotta nel prodotto i -esimo dalla sostituzione k,m .

Le scelte di costruzione di un sistema ABC possono portare alla combinazione di più driver in uno solo (ad esempio dei driver E_{k1}, E_{k2}, E_{k3} con E_m). Babad e Balachandran (1993, pag.568) dimostrano che l’accuratezza della combinazione $U_i - U^{(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, m)}$ coincide con l’accuratezza che si otterrebbe sostituendo alla combinazione multipla il gruppo delle equivalenti combinazioni a coppie; si ha quindi che

$$U_i - U^{(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, m)} = U_i - U_i^{(k_1, m) \dots (k_n, m)}. \quad [4]$$

Come già accennato, la rinuncia all’uso di un driver E_k a favore di un driver E_m , e la somma dei costi dell’attività A_k nell’attività A_m comporta il risparmio del costo C_k di rilevazione del driver E_k . A questo risparmio si contrappone la “distanza”, distorsione complessiva indotta nel costo dei prodotti: $\sqrt{\sum_{i=1}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}$.

Tale valore è assunto come indicatore del “costo” dell’eliminazione del *driver* E_k . Ma osservato che “non tutti i prodotti sono creati uguali” e che “alcuni hanno una maggiore importanza strategica od operativa” gli autori (pag. 569) introducono anche i pesi, indicando con w_i il peso da attribuire al generico prodotto P_i , ottenendo quindi la seguente espressione pesata della distanza:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^I w_i (U_i - U_i^{k,m})^2} .$$

La contrapposizione fra risparmio e costo indotto dalla eliminazione di *driver* permette la formulazione di un modello di massimizzazione del “risparmio” totale pesato, in cui il risparmio è inteso come differenza tra i mancati costi di rilevazione e gestione dell’informazione C_k (elemento positivo) e la distanza o distorsione indotta (elemento negativo) dalla sostituzione del *driver* E_k con il *driver* E_m . L’ottimo è ricercato attraverso la selezione delle coppie di *driver* (indicate come coppie k,m in cui E_k è il *driver* eliminato a favore del *driver* E_m) che rendono massima l’espressione:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{tutte le coppie } (k,m)} X_{k,m} \left\{ C_k - \sqrt{\sum_i w_i (U_i - U_i^{k,m})^2} \right\} = \\ = \sum_{\text{tutte le coppie } (k,m)} X_{k,m} \left\{ C_k - D_k \sqrt{\sum_i w_i (V_{i,k} - V_{i,m})^2} \right\} \end{aligned} \quad [5]$$

in cui $X_{k,m} = 1$ se (k,m) è una coppia scelta a far parte della selezione ottima, altrimenti $X_{k,m} = 0$, e con il vincolo opzionale

$$\sum_{\text{tutte le coppie } (k,m)} X_{k,m} \leq N$$

qualora si intenda limitare ad N il numero massimo di *cost driver* da usare.

Questa formulazione fa ricadere l’ottimizzazione dei *cost driver* di un sistema ABC nella classe dei problemi noti come *Problema Binario dello Zaino (Binary Knapsack Problem)*, per il quale esistono efficienti algoritmi di soluzione (Martello e Toth, 1988).

Per la scelta ottimale dei *driver* Babad e Balachandran, benché non ritenuto da altri necessario (Homburg, 2001), suggeriscono l’uso del *composite greedy algorithm* di Garey e Johnson (Garey e Johnson, 1979) che permette una soluzione euristica approssimata del problema dello zaino. Il procedimento adottato è il seguente:

1. si ordinano per prima cosa le coppie k,m in modo decrescente secondo il valore assunto da $C_k - \sqrt{\sum_i w_i (U_i - U_i^{k,m})^2}$;
2. dalla lista si sceglie la coppia k,m con il valore più alto nell'ordinamento indicato al punto 1: in essa il *driver* k rappresenta "l'origine" (il *driver* da eliminare) ed il *driver* m la "destinazione";
3. dalla lista si eliminano tutte le altre coppie con un'origine k , perché questa "origine" è già stata combinata con un'altra "destinazione";
4. dalla lista si eliminano tutte le coppie con origine m , poiché tale *driver* è già stato scelto come destinazione per una combinazione di *driver*;
5. se la lista contiene una coppia m,n questo significa che m è già stato scelto per essere sostituito da n . Perciò la coppia k,m deve essere eliminata e sostituita da k,n ;
6. si ripete la procedura dal punto due, e si continua fino a che si raggiunge il numero N di *driver* scelto come limite, oppure la lista sia esaurita.

4 – Il valore da ottimizzare e la funzione dei pesi w_i

Dopo aver esaminato il modello di Babad e Balachandran, concentriamo ora l'attenzione sui punti che ci proponiamo di analizzare.

In relazione al primo obiettivo di questa nota osserviamo che il valore che il modello è volto a ottimizzare deriva dalla contrapposizione di due grandezze disomogenee, in quanto a un costo cessante non contrappone un costo sorgente ma un indicatore di distorsione della determinazione di costo. Per omogeneità sarebbe teoricamente opportuno che al beneficio venisse contrapposto il costo effettivo o stimato generato dalla distorsione nel calcolo dei costi di produzione, grandezza la cui determinazione risulta difficile e incerta nel risultato.

Il secondo obiettivo della nota ci porta a concentrare l'attenzione sui pesi w_i , accompagnando l'analisi con l'esempio numerico utilizzato da Babad e Balachandran (Babad e Balachandran, 1993, p. 573 e segg.). Nella tavola 1 sono indicati costi U_i dei prodotti per quattro prodotti ($I=4$) attribuendo i costi C_j di cinque attività ($J=5$) sulla base delle frequenze relative V_{ij} di consumo di cinque *driver*.

Dati J *driver*, è possibile costruire $J(J-1)$ disposizioni di due *driver* k,m con $1 \leq k \leq J$, $1 \leq m \leq J$ e $k \neq m$. Ogni coppia rappresenta l'eliminazione di un *driver* E_k a favore di un *driver* E_m , e l'attribuzione del costo dell'attività D_k a D_m . Con $J=5$ si hanno le 20 disposizioni di tavola 2.

Nella tavola 2 è indicata, per ogni coppia possibile, l'accuratezza $(U_i - U_i^{k,m})$ derivante dalla sostituzione k,m in ciascuno dei quattro prodotti P_i . Si può osservare che, per ogni coppia, la somma algebrica delle accuratezze dei prodotti si annulla.

Tavola 1 – Prodotti, driver e frequenze relative, costi overhead e costi di informazione

		Cost driver j					
		Cost driver 1	Cost driver 2	Cost driver 3	Cost driver 4	Cost driver 5	
Prodotti	Quantità	Materiali e lavoro diretto	Ore macchina	Setup	Ordini	Parti	Costi overhead totali
i		V_{i1}	V_{i2}	V_{i3}	V_{i4}	V_{i5}	U_i
P1	10	0,0227	0,0588	0,1250	0,1250	0,2500	1026
P2	100	0,2273	0,2353	0,2500	0,3750	0,2500	2550
P3	10	0,0682	0,1176	0,1250	0,1250	0,2500	1338
P4	100	0,6818	0,5882	0,5000	0,3750	0,2500	5110
Costo dell'attività D_j		2464	3400	960	1200	2000	10024
Costo dell'informazione C_j		2500	1500	2000	2000	2500	

Tavola 2 – Accuratezza delle sostituzioni k,m per ogni coppia e prodotto

Accuratezza					
Prodotti	P1	P2	P3	P4	
Coppie k,m	$U_1-U_1^{km}$	$U_2-U_2^{km}$	$U_3-U_3^{km}$	$U_4-U_4^{km}$	Σ accuratezze
1,2	-88,94	-19,76	-121,88	230,58	0,00
1,3	-252,00	-56,00	-140,00	448,00	0,00
1,4	-252,00	-364,00	-140,00	756,00	0,00
1,5	-560,00	-56,00	-448,00	1.064,00	0,00
2,1	122,73	27,27	168,18	-318,18	0,00
2,3	-225,00	-50,00	-25,00	300,00	0,00
2,4	-225,00	-475,00	-25,00	725,00	0,00
2,5	-650,00	-50,00	-450,00	1.150,00	0,00
3,1	98,18	21,82	54,55	-174,55	0,00
3,2	63,53	14,12	7,06	-84,71	0,00
3,4	0,00	-120,00	0,00	120,00	0,00
3,5	-120,00	0,00	-120,00	240,00	0,00
4,1	122,73	177,27	68,18	-368,18	0,00
4,2	79,41	167,65	8,82	-255,88	0,00
4,3	0,00	150,00	0,00	-150,00	0,00
4,5	-150,00	150,00	-150,00	150,00	0,00
5,1	454,55	45,45	363,64	-863,64	0,00
5,2	382,35	29,41	264,71	-676,47	0,00
5,3	250,00	0,00	250,00	-500,00	0,00
5,4	250,00	-250,00	250,00	-250,00	0,00

Utilizziamo ora come misura della distorsione per ogni prodotto il quadrato delle accuratezze, equivalenti al quadrato delle distanze, $(U_i - U_i^{k,m})^2$, così come proposto dagli autori, ed esponiamo i valori nella tavola 3, unitamente ai valori della somma dei quadrati delle distanze

$\sum_{i=1}^I (U_i - U_i^{k,m})^2$ di ogni coppia k,m , somma che non essendo più nulla, costituisce un modo idoneo a rappresentare l'errore complessivo indotto da tale sostituzione in tutti e quattro i prodotti, e quindi nel costo totale di produzione.

Introduciamo infine i pesi w_1, w_2, \dots, w_I da attribuire ai prodotti P_i . La somma dei quadrati delle distanze per la generica coppia k,m introducendo i pesi w_i , può essere scritta come

$$\sum_{i=1}^I w_i (U_i - U_i^{k,m})^2 + w_2 (U_2 - U_2^{k,m})^2 + \dots + w_4 (U_4 - U_4^{k,m})^2.$$

Tavola 3 – Quadrato della distanza per coppia, prodotto e totale produzione

Quadrato della distanza					
Prodotti	P1	P2	P3	P4	
Coppie	$(U_1 - U_1^{k,m})^2$	$(U_2 - U_2^{k,m})^2$	$(U_3 - U_3^{k,m})^2$	$(U_4 - U_4^{k,m})^2$	$\sum (U_i - U_i^{k,m})^2$
1,2	7910,32	390,46	14854,73	53167,14	76.322,65
1,3	63504,00	3136,00	19600,00	200704,00	286.944,00
1,4	63504,00	132496,00	19600,00	571536,00	787.136,00
1,5	313600,00	3136,00	200704,00	1132096,00	1.649.536,00
2,1	15062,65	743,65	28284,51	101238,51	145.329,33
2,3	50625,00	2500,00	625,00	90000,00	143.750,00
2,4	50625,00	225625,00	625,00	525625,00	802.500,00
2,5	422500,00	2500,00	202500,00	1322500,00	1.950.000,00
3,1	9639,31	476,11	2975,70	30467,70	43.558,83
3,2	4036,06	199,37	49,84	7175,78	11.461,06
3,4	0,00	14400,00	0,00	14400,00	28.800,00
3,5	14400,00	0,00	14400,00	57600,00	86.400,00
4,1	15062,65	31424,65	4648,51	135556,51	186.692,33
4,2	6305,95	28106,52	77,79	65474,57	99.964,84
4,3	0,00	22500,00	0,00	22500,00	45.000,00
4,5	22500,00	22500,00	22500,00	22500,00	90.000,00
5,1	206615,70	2065,70	132234,05	745874,05	1.086.789,50
5,2	146191,52	864,95	70071,38	457611,66	674.739,52
5,3	62500,00	0,00	62500,00	250000,00	375.000,00
5,4	62500,00	62500,00	62500,00	62500,00	250.000,00

Se ci si limita a ponderare un singolo prodotto, ad esempio il prodotto P_1 , e quindi attribuendo ai pesi w_2, \dots, w_I il valore 1, essa può essere rappresentata come $w_1 (U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2$. Nella tavola 4, derivata dalla 3, i valori delle distanze per ogni coppia k,m sono espressi in quest'ultimo modo, con l'indicazione separata della componente

relativa al prodotto P_l rispetto a quella relativa agli altri prodotti, assegnando per il momento anche al peso w_l il valore 1.

Se in tale tavola riportiamo anche i valori C_k dei costi di rilevazione, si ottengono per ogni coppia i parametri di una “funzione di *trade-off* risparmio-errore” $f_{k,m}(w_1)$ nella variabile w_1

$$f_{k,m}(w_1) = C_k - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2} \quad [6]$$

la cui condizione di realtà è la seguente:

$$w_1 \geq - \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \quad [7]$$

Nell’ultima colonna della tavola 4 sono indicati anche i valori assunti per $w_1=1$ dalle funzioni $f_{k,m}(w_1)$.

Tavola 4 – Parametri della funzione $f(w_1)$ per ogni coppia k,m e valore della funzione per $w_1=1$

Coppie	C_k	$w_1^*(U_1 - U_1^{k,m})^2$ con $w_1=1$	$\sum_{i=2}^4 (U_i - U_i^{k,m})^2$	$f_{k,m}(w_1)$ con $w_1=1$
1,2	2.500,00	7910,32	68412,33	2.223,73
1,3	2.500,00	63504,00	223440,00	1.964,33
1,4	2.500,00	63504,00	723632,00	1.612,79
1,5	2.500,00	313600,00	1335936,00	1.215,66
2,1	1.500,00	15062,65	130266,68	1.118,78
2,3	1.500,00	50625,00	93125,00	1.120,86
2,4	1.500,00	50625,00	751875,00	604,18
2,5	1.500,00	422500,00	1527500,00	103,58
3,1	2.000,00	9639,31	33919,52	1.791,29
3,2	2.000,00	4036,06	7425,00	1.892,94
3,4	2.000,00	0	28800,00	1.830,29
3,5	2.000,00	14400,00	72000,00	1.706,06
4,1	2.000,00	15062,65	171629,68	1.567,92
4,2	2.000,00	6305,95	93658,89	1.683,83
4,3	2.000,00	0	45000,00	1.787,87
4,5	2.000,00	22500,00	67500,00	1.700,00
5,1	2.500,00	206615,70	880173,80	1.457,51
5,2	2.500,00	146191,52	528547,99	1.678,57
5,3	2.500,00	62500,00	312500,00	1.887,63
5,4	2.500,00	62500,00	187500,00	2000,00

Ottenuti i valori per $w_1=1$ delle funzioni $f_{k,m}(w_1)$ è possibile procedere alla applicazione dell'algoritmo *greedy*. A tale fine occorre ordinare in modo decrescente, come in tavola 5, i valori delle $J(J-1)$ funzioni k,m e poi attuare la scelta oppure l'eliminazione delle coppie con le modalità descritte al paragrafo 3. Nell'esempio utilizzato il risultato è la scelta dei *driver* 2 e 4.

Tavola 5. Lista ordinata dei valori $f(w_1)$ e driver scelti

Coppie	C_k	$w_1^*(U_1 - U_1^{k,m})^2$ con $w_1=1$	$\sum_{i=2}^4 (U_i - U_i^{k,m})^2$	$f(w_1)$ con $w_1=1$	Applicazione algoritmo
1,2	2.500,00	7910,32	68412,33	2.223,73	scelto
5,4	2.500,00	62500,00	187500,00	2.000,00	scelto
1,3	2.500,00	63504,00	223440,00	1.964,33	eliminato
3,2	2.000,00	4036,06	7425,00	1.892,94	eliminato
5,3	2.500,00	62500,00	312500,00	1.887,63	eliminato
3,4	2.000,00	0	28800,00	1.830,29	eliminato
3,1	2.000,00	9639,31	33919,52	1.791,29	eliminato
4,3	2.000,00	0	45000,00	1.787,87	eliminato
3,5	2.000,00	14400,00	72000,00	1.706,06	eliminato
4,5	2.000,00	22500,00	67500,00	1.700,00	eliminato
4,2	2.000,00	6305,95	93658,89	1.683,83	eliminato
5,2	2.500,00	146191,52	528547,99	1.678,57	eliminato
1,4	2.500,00	63504,00	723632,00	1.612,79	eliminato
4,1	2.000,00	15062,65	171629,68	1.567,92	eliminato
5,1	2.500,00	206615,70	880173,80	1.457,51	eliminato
1,5	2.500,00	313600,00	1335936,00	1.215,66	eliminato
2,3	1.500,00	50625,00	93125,00	1.120,86	eliminato
2,1	1.500,00	15062,65	130266,68	1.118,78	eliminato
2,4	1.500,00	50625,00	751875,00	604,18	eliminato
2,5	1.500,00	422500,00	1527500,00	103,58	eliminato

Poiché l'uso dell'algoritmo *greedy* comporta che la scelta delle coppie di *driver* avvenga per valori decrescenti delle funzioni $f_{k,m}(w_1)$, attribuire valori al peso w_1 (e, più in generale, ai pesi w_i) significa voler ottenere alterazioni nelle posizioni reciproche delle coppie. Cambiamenti nelle posizioni dell'ordinamento decrescente modificano la probabilità per le coppie di essere scelte, e quindi alterano potenzialmente la scelta dei *driver* da conservare e di quelli da eliminare.

In linea di principio i valori attribuibili ai pesi w_i possono essere, entro i limiti della condizione di realtà [7], sia negativi che positivi.

5 – La pesatura di un solo prodotto: confronto di coppie di funzioni di trade-off

Continuando per semplicità a procedere con la pesatura di un solo prodotto, per chiarire le conseguenze della scelta del peso esaminiamo il comportamento di due funzioni di *trade-off*

$f_{k,m}(w_1)$ e $f_{b,e}(w_1)$:

$$f_{k,m}(w_1) = C_k - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2} \quad [8]$$

$$f_{b,e}(w_1) = C_b - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{b,e})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2} \quad [9]$$

tali che $f_{k,m}(1) > f_{b,e}(1)$, ovvero la prima preceda la seconda nella lista ordinata in modo decrescente dei valori assunti dalle due funzioni quando $w_1 = 1$. Consideriamo la funzione:

$$f(w_1) = C_k - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2} - C_b + \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{b,e})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2} \quad [10]$$

Ciò che occorre mettere in luce è se, e per quali valori di w_1 , si abbia:

$$f_{k,m}(w_1) \leq f_{b,e}(w_1) \quad [11]$$

sotto la condizione che sia comunque $f_{k,m}(w_1) \geq 0$ e $f_{b,e}(w_1) \geq 0$, per evitare che le due funzioni, al crescere di w_1 esprimano “risparmi” negativi.

L’esame analitico della [10] è effettuato nelle Appendici 1 e 2. Di seguito se ne riportano, per non appesantire la trattazione, solo i risultati.

Per la loro migliore comprensione però è opportuno richiamare la condizione di realtà [7] e specificare che i termini $(U_1 - U_1^{k,m})^2$ e $(U_1 - U_1^{b,e})^2$ esprimono indicatori dell’errore causato per il primo dalla sostituzione del *driver* E_k con il *driver* E_m e per il secondo dalla sostituzione del *driver* E_b con il *driver* E_e nel prodotto P_1 . Quindi quanto più alto è il loro valore, maggiore è

l’errore. Analogamente i termini $\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2$ e $\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2$ esprimono indica-

tori di errore causati in tutti i restanti prodotti diversi da P_1 dalla sostituzione del *driver* E_k con il *driver* E_m e del *driver* E_b con il *driver* E_e .

I risultati dell'analisi hanno indicato che, quando la funzione (maggiore per $w_1 = 1$) $f_{k,m}(w_1)$, anche all'estremo inferiore del campo di esistenza è maggiore della funzione $f_{b,e}(w_1)$, affinché essa diventi inferiore occorre che:

1. l'errore indotto nel prodotto P_I dalla sostituzione k,m sia maggiore dell'errore indotto dalla sostituzione b,e ;
2. il peso w_1 da attribuire al prodotto P_I sia maggiore di 1 affinché le due coppie k,m e b,e invertano la loro posizione nell'ordinamento utilizzato dall'algoritmo *greedy*, e quindi sia favorita la scelta della coppia che ha provocato un errore minore.
3. Se l'errore indotto in P_I dalla sostituzione k,m è minore dell'errore indotto nel prodotto P_I dalla sostituzione b,e non vi è alcun valore attribuibile a w_1 che possa invertire le posizioni, (salvo un caso indicato in Appendice 1 come il "caso 3");
4. il "caso 3" ricorre in presenza di valori molto particolari dei parametri delle funzioni di *trade-off*, ed ammette, a seconda di tali valori, o l'inversione delle funzioni per valori di w_1 minori di 1 compresi in un ristretto intervallo, oppure l'inversione per valori di w_1 maggiori di 1, compresi sempre in un ristretto intervallo.

Se al contrario all'estremo inferiore del campo di esistenza la funzione $f_{k,m}(w_1)$ è minore della funzione $f_{b,e}(w_1)$, ma è maggiore quando $w_1 = 1$:

1. affinché $f_{k,m}(w_1)$ diventi inferiore occorre che l'errore indotto in P_I dalla sostituzione k,m sia minore dell'errore indotto sempre in P_I dalla sostituzione b,e ;
2. il peso w_1 da attribuire a P_I sia minore di 1 affinché le due coppie invertano la loro posizione nell'ordinamento utilizzato dall'algoritmo *greedy*. Peraltro, procedendo in questo modo, sarebbe favorita la scelta della coppia che ha provocato un errore maggiore. L'attribuzione di un peso maggiore dell'unità non cambia la posizione delle funzioni;
3. se all'estremo inferiore del campo di esistenza la funzione $f_{k,m}(w_1)$ è minore della funzione $f_{b,e}(w_1)$, e l'errore indotto in P_I dalla sostituzione k,m è maggiore o uguale all'errore indotto sempre in P_I dalla sostituzione b,e generalmente, salvo una eccezione (punto 4 successivo), la $f_{k,m}(1)$ è minore della $f_{b,e}(1)$ e quindi la possibilità di confronto fra la $f_{k,m}(1)$ e la $f_{b,e}(1)$ non si presenta;
4. l'eccezione (delineata nel "caso 9" dell'Appendice 1) mostra che in presenza di particolari valori dei parametri delle due funzioni, la $f_{k,m}(1)$ è maggiore della $f_{b,e}(1)$ ed esistono sia valori di $w_1 < 1$ che valori di $w_1 > 1$, purché esterni ad un preciso intervallo, per i quali si ha l'inversione della posizione fra le due funzioni.

Infine, sempre sotto la condizione $f_{k,m}(1) > f_{b,e}(1)$, se all'estremo inferiore del campo di esistenza la funzione $f_{k,m}(w_1)$ è uguale alla funzione $f_{b,e}(w_1)$, confermando le regole sopra esposte:

1. con un errore indotto in P_I dalla sostituzione k,m minore dell'errore indotto sempre in P_I dalla sostituzione b,e l'inversione della posizione delle due coppie o non può essere effettuata (qualsiasi valore di w_1 si scelga), oppure richiede l'attribuzione a w_1 di valori minori di 1;
2. con un errore indotto in P_I dalla sostituzione k,m maggiore dell'errore indotto in P_I dalla sostituzione b,e il cambiamento delle posizioni avviene per valori di w_1 maggiori di 1.

In estrema sintesi quindi l'attribuzione al peso di valori positivi adeguati e maggiori dell'unità provocherà, quando possibile, l'alterazione delle posizioni delle coppie di *driver* rispetto all'ordinamento decrescente "neutrale" (e cioè senza pesi), in modo che l'applicazione dell'algoritmo *greedy* abbia maggiore probabilità di "scegliere", nel ridurre il numero dei *driver*, quelle combinazioni che causeranno l'errore minore nella attribuzione al prodotto P_I dei costi *overhead*.

6 – Un procedimento per la scelta effettiva del valore di ponderazione per un solo prodotto

Esaminate le ragioni che richiedono l'utilizzo di pesi positivi e maggiori dell'unità, non è però ancora chiaro quale debba essere l'effettiva entità dei pesi da usare e quale sia l'effetto complessivo, su tutte le coppie dei *driver*, della scelta o scelte compiute.

Nell'analisi fin qui condotta si sono contrapposte due coppie di *driver*. Il procedimento, per individuare quali siano i valori positivi che producono (eventualmente) cambiamenti nelle posizioni indicate nella tavola 5 comporta un esame esteso a tutti i possibili confronti fra una coppia e quelle sottostanti della lista ordinata in modo decrescente. Così, la coppia 1,2 deve essere confrontata con le coppie 5,4; 1,3; 3,2;.....2,5; poi la coppia 5,4 va confrontata con le coppie 1,3; 3,2;...2,5, e così di seguito.

Questo procedimento comporta un numero di confronti pari a al numero delle combinazioni di $J(J-1)$ elementi di classe 2, e quindi i confronti da effettuarsi sono $\frac{J(J-1)[J(J-1)-1]}{2}$. Con rife-

rimento ai dati dell'esempio in esame esposti nella tavola 5, sono necessari $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ confronti.

Tali confronti sono riportati (in modo parziale, data la numerosità dei dati) nella tavola 6, dove sia nelle colonne che nelle righe sono indicate le coppie di *driver* della lista di tavola 5 ordinate in modo decrescente per i valori assunti da $f(w_1)$ quando $w_1=1$. Per ciascuno degli incroci colonna-riga va ricercata (ove esista, e sia accettabile) la o le soluzione della disequazione [11], con $k,m \neq b,e$.

L'individuazione dei valori di w_1 che soddisfano alla [11] richiede la risoluzione dell'equazione [10] per $f(w_1)=0$ e la verifica che i risultati (quando esistono) siano accettabili. Tra i vincoli di accettabilità, per quanto detto sopra, si è posto che sia $w_1 > 1$.

Nel corpo della tavola vengono riportati i valori che soddisfano, per ogni incrocio riga/colonna, l'equazione [10].

Tavola 6 – Valori di w_1 per cui $f_{k,m}(w_1) = f_{b,e}(w_1)$

Coppie b,e	Coppie di driver k,m					Coppie di driver k,m		
1,2	1,2	5,4	1,3	3,2	2,3	2,1	2,4
5,4								
1,3								
3,2	361,25	3,77	2,90					
5,3			88,71					
3,4	48,05	4,18	3,54	5,30				
3,1		8,18	7,05					
4,3		5,11	4,47	9,31				
3,5		13,54	12,12					
4,5		22,00	19,74					
4,2		9,79	8,86					
5,2								
1,4								
4,1		19,26	17,77					
5,1								
1,5								
2,3		1586,54	1354,19					
2,1		63,97	61,01			1,04		
2,4		1701,82	1460,97					
2,5							

Come si può osservare i valori ottenuti si presentano però in modo poco adatto a compiere scelte, per effettuare le quali è opportuno costruire un ulteriore ordinamento.

Tavola 7 – Preparazione all'ordinamento delle coppie per valori crescenti di w_1 .

Col.1	Col.2	Col.3	Segue col.1	Segue col.2	Segue col.3
-------	-------	-------	-------------	-------------	-------------

<i>Coppia di testata</i>	<i>Coppia di riga</i>	<i>Valore di $w_1 >$ di..</i>	<i>Coppia di testata</i>	<i>Coppia di riga</i>	<i>Valore di $w_1 >$ di..</i>
1,2	5,4		1,3	3,2	2,90
1,2	1,3		1,3	5,3	88,71
1,2	3,2	361,25	1,3	3,4	3,54
1,2	5,3		1,3	3,1	7,05
1,2	3,4	48,05	1,3	4,3	4,47
1,2	3,1		1,3	3,5	12,12
1,2	4,3		1,3	4,5	19,74
1,2	3,5		1,3	4,2	8,86
1,2	4,5		1,3	5,2	
1,2	4,2		1,3	1,4	
1,2	5,2		1,3	4,1	17,77
1,2	1,4		1,3	5,1	
1,2	4,1		1,3	1,5	
1,2	5,1		1,3	2,3	1354,19
1,2	1,5		1,3	2,1	61,01
1,2	2,3		1,3	2,4	1460,97
1,2	2,1		1,3	2,5	
1,2	2,4				
1,2	2,5		3,2	5,3	
			3,2	3,4	5,30
5,4	1,3		3,2	3,1	
5,4	3,2	3,77	3,2	4,3	9,31
5,4	5,3		3,2	3,5	
5,4	3,4	4,18	3,2	4,5	
5,4	3,1	8,18	3,2	4,2	
5,4	4,3	5,11	3,2	5,2	
5,4	3,5	13,54	3,2	1,4	
5,4	4,5	22,00	3,2	4,1	
5,4	4,2	9,79	3,2	5,1	
5,4	5,2		3,2	1,5	
5,4	1,4		3,2	2,3	
5,4	4,1	19,26	3,2	2,1	
5,4	5,1		3,2	2,4	
5,4	1,5		3,2	2,5	
5,4	2,3	1586,54	-----	-----	-----
5,4	2,1	63,97	-----	-----	-----
5,4	2,4	1701,82	-----	-----	-----
5,4	2,5		-----	-----	-----

Tavola 8. Coppie sostituenti e sostituite per valori crescenti di w_1

<i>Coppia sostituita</i>	<i>Coppia sostituyente</i>	<i>Valore di $w_1 > \dots$</i>
2,3	2,1	1,04
3,1	4,3	1,62
4,5	4,2	1,62
1,5	2,1	1,99
5,3	3,4	2,18
5,2	1,4	2,36
3,5	4,2	2,68
5,2	4,1	2,74
1,5	2,3	2,74
1,3	3,2	2,90
1,3	3,4	3,54
5,4	3,2	3,77
5,4	3,4	4,18
1,3	4,3	4,47
5,4	4,3	5,11
3,2	3,4	5,30
1,3	3,1	7,05
5,4	3,1	8,18
1,3	4,2	8,86
3,2	4,3	9,31
5,4	4,2	9,79
1,3	3,5	12,12
5,4	3,5	13,54
1,3	4,1	17,77
5,4	4,1	19,26
1,3	4,5	19,74
5,4	4,5	22,00
1,2	3,4	48,05
1,3	2,1	61,01
5,4	2,1	63,97
1,3	5,3	88,71
1,2	3,2	361,25
1,3	2,3	1354,19
1,3	2,4	1460,97
5,4	2,3	1586,54
5,4	2,4	1701,82

Se ad ogni coppia di driver k,m della tavola 6 affianchiamo, come in tavola 7, l'elenco delle coppie b,e ed i valori (quando esistenti) a partire dai quali al crescere di w_1 le funzioni $f_{b,e}(w_1)$ diventeranno maggiori delle $f_{k,m}(w_1)$, e poi ordiniamo i due elenchi affiancati per valori cre-

scenti di w_1 , come in tavola 8, si ottiene un quadro chiaro delle alterazione nella posizione delle coppie al crescere del peso.

La tavola 8 offre gli elementi per costruire il prospetto di tavola 9, in cui in ogni colonna, per i valori di w_1 compresi nell'intervallo indicato, alla lista originaria di tavola 5 è affiancata una nuova lista di coppie di *driver* ordinata per valori decrescenti.

Tavola 9. Cambiamenti nell'ordinamento delle coppie dei driver al crescere di w_1 .

Ordinamento originale	Valori di w_1 compresi tra								
	1,04 -1,62	1,62 - 1,99	1,99 -2,18	2,18 -2,36	2,36 -2,68	2,68 -2,70	2,70 -2,74	2,74 -2,90	-----
	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento	Nuovo ordinamento
1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4	5,4
1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2
5,3	5,3	5,3	5,3	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4
3,4	3,4	3,4	3,4	5,3	5,3	5,3	5,3	5,3	5,3
3,1	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3
4,3	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1
3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	4,2	4,2	4,2	4,2
4,5	4,5	4,2	4,2	4,2	4,2	3,5	3,5	3,5	3,5
4,2	4,2	4,5							
5,2	5,2	5,2	5,2	5,2	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4
1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	5,2	5,2	4,1	4,1	4,1
4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	5,2	5,2	5,2
5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1
1,5	1,5	1,5	2,1						
2,3	2,1	2,1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	2,3
2,1	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	1,5
2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5

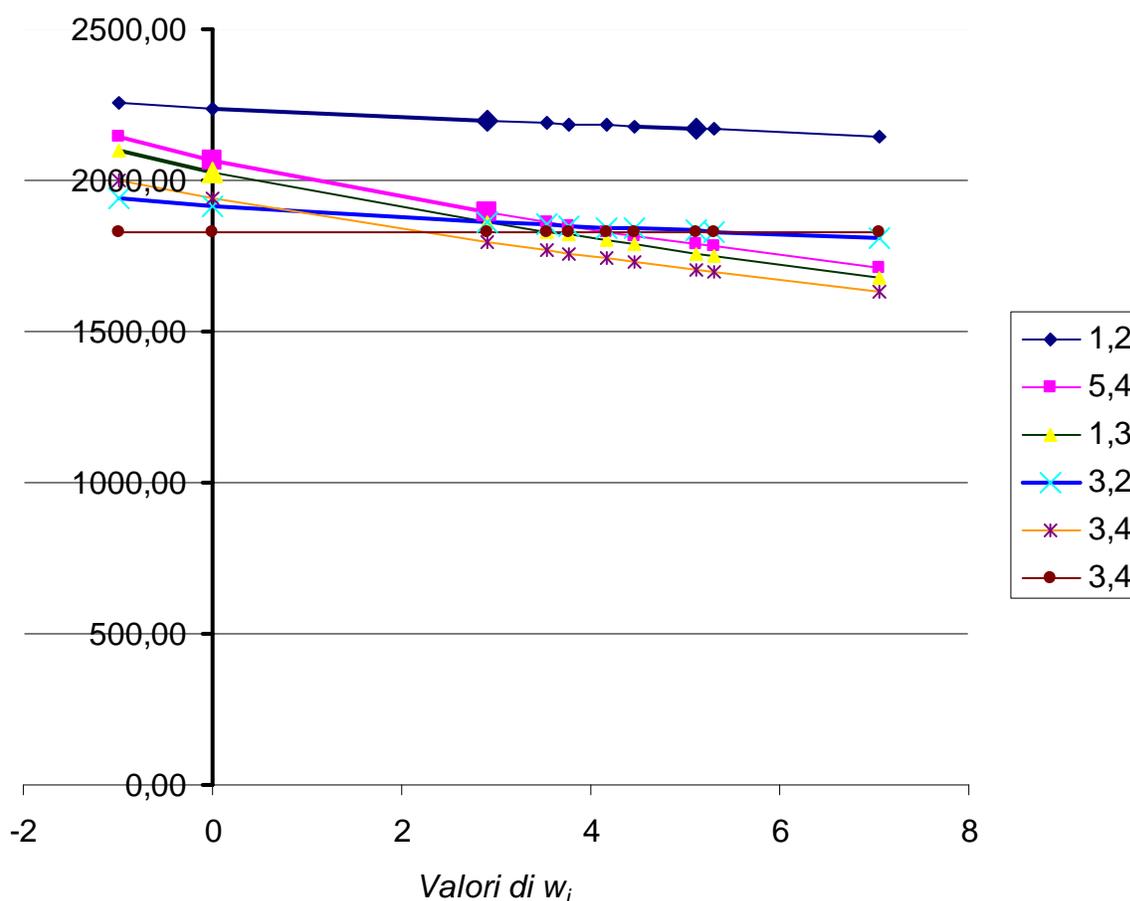
Terminando l'esame del procedimento costruito per dare un quadro razionale alla scelta del peso w_1 – limitato ad un prodotto - occorre sottolineare ancora un elemento: il processo di pesatura influisce sul numero e sull'identità dei *driver* scelti, ma non cambia minimamente la variazione di accuratezza derivante dalla eliminazione dei *driver* sacrificati.

7 – Osservazioni conclusive sul processo di pesatura

La prima osservazione che si presenta spontaneamente è che il procedimento illustrato per una scelta rigorosa del peso – pur nel caso più semplice di pesatura di un solo prodotto - appare, ancorché non difficile, assai pesante dal punto di vista operativo. e di difficile utilizzabilità.

La questione che si pone immediatamente è se sia possibile individuare un processo meno laborioso. In effetti si può ricorrere a un processo euristico più semplice. Per tutte le $J(J-1)$ disposizioni di due driver k,m si possono definire le funzioni $f_{k,m}(w_1)$, e, procedendo per opportuni intervalli, attribuire loro valori crescenti di w_1 . L'esame dei valori assunti dalle funzioni per ciascun w_1 , il successivo ordinamento decrescente delle medesime, accompagnato eventualmente da una visualizzazione grafica dell'andamento delle funzioni al crescere del peso (quale quella presentata nel grafico 1), permette di identificare rapidamente i mutamenti di posizione delle coppie dei driver e di raffinare eventualmente per passi successivi la scelta del valore di w_1 più opportuno.

Grafico 1 – Esempio di andamento di funzioni di trade-off



La seconda osservazione che si avanza è che l'analisi fin qui effettuata riguarda la scelta del peso da attribuire ad un solo prodotto. Naturalmente, il processo di pesatura può interessare più prodotti, e quindi richiedere la determinazione di più pesi w_i . In tale caso, supponendo in prima

istanza che i prodotti interessati siano solo due, P_1 e P_2 , la disequazione da utilizzare per la determinazione dei valori w_1 e w_2 diverrebbe:

$$C_k - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{k,m})^2 + w_2(U_2 - U_2^{k,m})^2 + \sum_{i=3}^I (U_i - U_i^{k,m})^2} < C_b - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{b,e})^2 + w_2(U_2 - U_2^{b,e})^2 + \sum_{i=3}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}$$

Ora, se si ponesse $w_1 = w_2$ si potrebbe ancora ricorrere al medesimo procedimento visto per il caso di un solo prodotto per determinare il valore w_1 e rendere evidenti gli effetti della scelta del peso sull'ordinamento delle coppie dei *driver*. Se invece si scegliesse di attribuire ai due pesi valori diversi, sarebbe necessario procedere per tentativi e con la fissazione arbitraria di uno dei due valori w_i . Difficoltà ancora maggiori si avrebbero se il numero dei prodotti da pesare fosse superiore a due, e ciò non solo per l'individuazione dei pesi più opportuni, ma anche per la comprensione e l'interpretazione dei risultati ottenuti.

8 – Conclusioni

Questa nota sul modello di Babad e Balachandran ha mirato a sviluppare più profondamente le implicazioni della pesatura dei prodotti, a considerare i limiti del procedimento proposto, e a verificare i limiti della significatività del criterio della massimizzazione del risparmio pesato.

Un motivo di grande interesse del procedimento di Babad e Balachandran è che il modello delineato apparentemente permette di massimizzare il risparmio derivante dalla eliminazione di *driver* contrapponendo costi cessanti (il beneficio della eliminazione di costi di informazione) a “costo sorgenti” rappresentati dai “costi della distanza pesata” (Babad e Balachandran, pag.569).

Ora, le due grandezze contrapposte non sono omogenee. La distanza, pesata oppure no, è un indicatore di errore o di distorsione della attribuzione dei costi *overhead* ai prodotti causati dalla eliminazione di *driver*, rispetto ad una situazione originaria che utilizzava tutti i *driver* per l'imputazione dei costi, ma non è un costo.

Il costo vero della riduzione del numero dei *driver* sarebbe dato dalla considerazione del danno e dei costi derivati, semmai fossero calcolabili, per la meno precisa imputazione dei costi.

Per quanto riguarda la pesatura dei prodotti, le considerazioni espone portano concludere che il modello appare, quando non si ricorra a procedimenti euristici, un modello laborioso che porta a risultati apprezzabili in termini di elementi per scelte razionali solo in situazioni “semplici” dei prodotti da pesare.

Le considerazioni critiche avanzate non intaccano comunque l'impianto generale del modello che resta suggestivo, e si presta alla esplorazione di varianti intorno alle variabili da utilizzare

per la scelta ottimale sia del numero di *driver* sia dei *driver* da implementare, assumendo limiti di costo di informazione e di complessità del sistema di imputazione dei costi *overhead*. La validità dello schema è dimostrata anche dall'utilizzo che un altro autore (Homburg, 2001) ne ha effettuato per mettere a punto un modello alternativo di selezione ottimale dei *cost driver*.

Bibliografia

- Babad Y.M. and Balachandran B.V. (1993), Cost driver optimization in activity-based costing, *The Accounting Review*, July [563-575].
- Cooper R. (1988), The rise of activity-based costing part one: what is an activity-based cost system?, *Journal of Cost Management*, Summer [45-54].
- Cooper R. (1989), The rise of activity-based costing part three: how many cost drivers do you need, and how do you select them?, *Journal of Cost Management*, Winter [34-46].
- Cooper R. and Kaplan R.S. (1988), How cost accounting distorts product costs, *Management Accounting*, April, [20-27]
- Cooper R. and Turney P.B.B. (1988), Tektroniks: Portable Instrument Division, *Harvard Business School Case* [188-142]
- Garey M.R. and Johnson D.S. (1979), *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, New York.
- Homburg C. (2001), A note on optimal cost driver selection in ABC, *Management Accounting Research*, June [197-205].
- Johnson H. T. and Kaplan R. S. (1987), *Relevance lost. The rise and fall of management accounting*, Harvard Business School Press
- Martello S. and Toth P. (1988), A new algorithm for the 0-1 knapsack problem, *Management Science*, May [633-644]
- Turney P.B. (1992), What an activity-based cost model looks like, *Journal of Cost Management*, Winter [54-60]

Appendice 1.

Riprendiamo le funzioni di *trade-off* $f_{k,m}(w_1)$ e $f_{b,e}(w_1)$ indicate nel paragrafo 5:

$$f_{k,m}(w_1) = C_k - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2} \quad [8]$$

$$f_{b,e}(w_1) = C_b - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{b,e})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2} \quad [9]$$

ed esse siano tali che $f_{k,m}(1) > f_{b,e}(1)$, ovvero la prima preceda la seconda nella lista ordinata dei valori assunti da $f_{k,m}(w_1)$ con $w_1 = 1$.

Sia W_L il valore assunto dalla funzione $f(w_1) = f_{k,m}(w_1) - f_{b,e}(w_1)$

$$f(w_1) = C_k - \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2} - C_b + \sqrt{w_1(U_1 - U_1^{b,e})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2} \quad [10]$$

in corrispondenza dell'estremo inferiore del campo di esistenza della medesima, cioè sia W_L il

limite della funzione per $w_1 \rightarrow -\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2}$ oppure $w_1 \rightarrow -\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}$, a seconda di

quale dei due termini sia il maggiore. Le espressioni analitiche dei valori del limite sono riportate nella Appendice 2.

Sia w^M il valore di w_1 nel punto in cui la $f(w_1)$ ammette un massimo o un minimo relativo, e sia $W^M = f(w^M)$: l'espressione analitica di W^M è esposta nella Appendice 2.

Sia infine C_k^{Max} il valore assunto da C_k oppure C_b^{Max} il valore assunto da C_b nei due casi alternativi in cui $W^M = 0$.

Le espressioni analitiche di C_k^{Max} e di C_b^{Max} sono anch'esse riportate nella Appendice 3.

Consideriamo, sotto la condizione $f_{k,m}(1) > f_{b,e}(1)$, per quali valori di w_1 sia $f(w_1) < 0$ e cioè:

$$f_{k,m}(w_1) < f_{b,e}(w_1). \quad [11]$$

Caso 1. Con

$$W_L > 0, \text{ ossia } f_{k,m} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) > f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right),$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 > (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \leq \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

il limite per $w_1 \rightarrow +\infty$ di $f(w_1)$ è pari a $-\infty$. Esiste quindi un solo valore $w^* > 1$ tale che per ogni $w_1 > w^*$ la [11] sia soddisfatta.

Caso 2. Con

$$W_L > 0, \text{ equivalente a } f_{k,m} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) > f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right),$$

$$C_k > C_k^{Max},$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 < (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} < \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

il limite di $f(w_1)$, per $w_1 \rightarrow +\infty$, è pari a $+\infty$. Non esiste alcun valore w_1 che soddisfi la [11].

Caso 3. Con

$$W_L > 0, \text{ ossia } f_{k,m} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) > f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right),$$

$$f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) < C_k < C_k^{Max},$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 < (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} < \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

la funzione ammette un minimo relativo. Il limite di $f(w_1)$, per $w_1 \rightarrow w^M$, è minore di 0, mentre per $w_1 \rightarrow +\infty$ è pari a $+\infty$. Poiché $f_{k,m}(1) > f_{b,e}(1)$ si presentano due situazioni:

$$\text{a) } \frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} > \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}}$$

$$\text{b) } \frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} < \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2 + \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}}.$$

Sotto la condizione a) vi sono due valori w^* e w^{**} , con $1 < w^* < w^{**}$ ove per $w^* < w_1 < w^{**}$ la [11] è soddisfatta; sotto la seconda condizione la [11] è soddisfatta per $w^* < w_1 < w^{**}$, con $1 < w^* < w^{**}$.

Caso 4. Con

$$w_L = 0, \text{ equivalente a } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) = f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right),$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 < (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} < \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

la funzione ammette un minimo relativo. Il limite di $f(w_1)$, per $w_1 \rightarrow w^M$, è minore di 0, mentre per $w_1 \rightarrow +\infty$ è pari a $+\infty$. Poiché $f_{k,m}(1) > f_{b,e}(1)$, le due funzioni si intersecano per un valore $w^* < 1$, e per tutti i $w_1 < w^*$ la [11] è soddisfatta.

Caso 5. Con

$$W_L < 0, \text{ e cioè } f_{k,m} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) < f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right),$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 < (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \leq \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

il limite di $f(w_1)$ per $w_1 \rightarrow +\infty$ è pari a $+\infty$. Esiste un unico valore $w^* < 1$ tale che per ogni $w_1 < w^*$ la [11] è soddisfatta.

Caso 6. Con

$$W_L > 0, \text{ ossia } f_{k,m} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) > f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right),$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 > (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \geq \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

il limite di $f(w_1)$ per $w_1 \rightarrow +\infty$ è pari a $-\infty$. La $f_{k,m}(w_1)$ e la $f_{b,e}(w_1)$ presentano una intersezione per un unico valore $w^* > 1$. Ogni valore $w_1 > w^*$ soddisfa la [11].

Caso 7. Con

$$W_L = 0, \text{ e cioè } f_{k,m} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) = f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right),$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 < (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \geq \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

il limite di $f(w_1)$, per $w_1 \rightarrow +\infty$, è pari a $+\infty$. La [11] non è soddisfatta da alcun valore di w_1 .

Caso 8. Con

$$w_L < 0, \text{ ossia } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) < f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right),$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 < (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \geq \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

il limite di $f(w_1)$, per $w_1 \rightarrow +\infty$, è pari a $+\infty$. La $f_{k,m}(w_1)$ e la $f_{b,e}(w_1)$ presentano una intersezione per un valore $w^* < 1$. La [11] è valida per tutti i valori di $w_1 < w^*$.

Caso 9. Con

$$w_L \leq 0, \text{ equivalente a } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) \leq f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right),$$

$$f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) \leq C_b < C_b^{Max},$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 > (U_1 - U_1^{b,e})^2,$$

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} > \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

se $W_L < 0$ il limite di $f(w_1)$ per $w_1 \rightarrow w^M$ è positivo, mentre, per $w_1 \rightarrow +\infty$, è pari a $-\infty$. La funzione $f(w_1)$ ha un massimo relativo, e $f_{k,m}(w_1)$ e $f_{b,e}(w_1)$ si intersecano in due punti $w^* < 1$ e $w^{**} > 1$. La [11] è soddisfatta per $w_1 < w^*$ e $w_1 > w^{**}$. Quando $W_L = 0$ e conseguentemente

$$f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) = C_b \text{ il valore } w^* \text{ coincide con } C_b \text{ e perciò la [11] è soddisfatta solo per}$$

$w_1 > w^{**}$.

Appendice 2. Limiti di $f(w_1)$ all'estremo inferiore del campo di esistenza.

Il calcolo di W_L , limite di $f(w_1)$ per $w_1 \rightarrow -\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2}$, se

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \leq \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}, \text{ a seconda dei valori assunti da } C_k \text{ e da } C_b \text{ conduce a uno}$$

dei seguenti risultati:

$$1) \quad W_L > 0, \text{ se } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) > f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right),$$

$$C_k > C_b - \sqrt{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} - \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right)};$$

$$2) \quad w_L = 0, \text{ se } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) = f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right),$$

$$C_k = C_b - \sqrt{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} - \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right)};$$

$$3) \quad w_L < 0, \text{ se } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right) < f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right),$$

$$C_k < C_b - \sqrt{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} - \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \right)}$$

Analogamente, w_L , per $w_1 \rightarrow -\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}$ se $\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} \geq \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}$, a

seconda dei valori assunti da C_k e da C_b conduce a uno dei seguenti risultati:

$$1) \quad w_L > 0, \text{ se } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) > f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right),$$

$$C_k > C_b + \sqrt{(U_1 - U_1^{k,m})^2 \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} - \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right)};$$

$$2) \quad w_L = 0, \text{ se } f_{k,m} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) = f_{b,e} \left(-\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right),$$

$$C_k = C_b + \sqrt{(U_1 - U_1^{k,m})^2 \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} - \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right)};$$

3) $W_L < 0$, se $f_{k,m} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right) < f_{b,e} \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right)$,

$$C_k < C_b + \sqrt{(U_1 - U_1^{k,m})^2 \left(\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} - \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2} \right)}.$$

Appendice 3. Valore del massimo o minimo relativo di $f(w_1)$

La $f'(w_1)$ si annulla per

$$w_1 = w^M = \frac{(U_1 - U_1^{k,m})^4 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2 - (U_1 - U_1^{b,e})^4 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2 (U_1 - U_1^{b,e})^2 [(U_1 - U_1^{b,e})^2 - (U_1 - U_1^{k,m})^2]}.$$

Sia $W^M = f(w^M)$:

$$W^M = C_k - C_b + \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{k,m})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{b,e})^2} \left(\sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2}} - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}} \right)}.$$

W^M rappresenta un minimo relativo se:

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} < \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 < (U_1 - U_1^{b,e})^2.$$

Il segno del minimo è negativo o nullo quando:

$$C_k \leq C_b - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{k,m})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{b,e})^2}} \left(\sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2}} - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}} \right)$$

La funzione $f(w^M)$ ha un massimo relativo se:

$$\frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2} > \frac{\sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2},$$

$$(U_1 - U_1^{k,m})^2 > (U_1 - U_1^{b,e})^2.$$

Il valore di w^M è positivo o nullo, se:

$$C_k \geq C_b - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{k,m})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{b,e})^2}} \left(\sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2}} - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}} \right)$$

Nel corpo della trattazione è indicato con C_k^{Max} il valore di C_k per cui $w^M = 0$, e cioè:

$$C_k^{Max} = C_b - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{k,m})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{b,e})^2}} \left(\sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2}} - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}} \right)$$

Analogamente è indicato con C_b^{Max} il valore di C_b per cui $w^M = 0$.

$$C_b^{Max} = C_b + \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{k,m})^2 \sum_{i=2}^I (U_i - U_i^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2 - (U_1 - U_1^{b,e})^2}} \left(\sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{b,e})^2}{(U_1 - U_1^{k,m})^2}} - \sqrt{\frac{(U_1 - U_1^{k,m})^2}{(U_1 - U_1^{b,e})^2}} \right)$$