

# Economia Aziendale Online

Business and Management Sciences
International Quarterly Review


## *Sull'utilizzo dei modelli matematici per la gestione d'impresa*

Fulvio Francavilla


Pavia, Settembre 2014
N. 2/2014
www.ea2000.it
www.economiaaziendale.it

PaviaUniversityPress

Electronic ISSN 2038-5498
Reg. Trib. Pavia n. 685/2007 R.S.P.

*Economia Aziendale Online* Vol. 5, 2/2014: 121-128 *Working Papers*
*www.ea2000.it*
DOI: 10.4485/ea203-5498.005.00013

# Sull'utilizzo dei modelli matematici per la gestione d'impresa

**Fulvio Francavilla**

## Abstract

Nel corso del presente lavoro verranno esposte alcune considerazione sul corretto utilizzo dei modelli matematici quale strumento di ausilio per una efficiente gestione d'impresa. Dopo avere brevemente richiamato i principali vantaggi (e i limiti) derivanti dall'utilizzo dei modelli matematici, vengono ricordati alcuni concetti operativi utili (o indispensabili) per un corretto utilizzo dei modelli citati. Vengono infine presentati e commentati, a titolo di esempio, alcuni modelli (relativi a un particolare problema connesso con la gestione delle scorte) con lo scopo di meglio evidenziare i pregi (e i difetti) di una razionale analisi di tipo matematico.

In this paper we will show some considerations concerning the correct use of mathematical models as a support tool for an efficient business management After having briefly recalled the main advantages (and limitations) arising from the use of mathematical models, some operational hints for a correct use of the models are presented and discussed. Finally, by way of examples related with stocks management, merits (and demerits) of a rational mathematical analysis are highlighted

**Keywords**: mathematical model, management, optimisation, projects.

## 1 – Premessa

Una questione che spesso ricorre nell'ambito della gestione aziendale ha a che fare con la maggiore, o minore, utilità che viene attribuita all'utilizzo dei modelli matematici.

Data, infatti, la premessa che un modello matematico ben difficilmente riesce a perfettamente rappresentare la situazione reale oggetto di studio, ci si chiede (a volte) quanto possa essere importante impegnare tempo e risorse per formulare un modello matematico (più o meno accurato), che dovrà poi essere analizzato in profondità (spesso dovendo procedere con delle procedure di ottimizzazioni matematiche tutt'altro che semplici), quando i risultati ottenuti risulteranno razionalmente perfetti per il modello matematico, ma non per la relativa (approssimata) situazione reale.

La risposta, crediamo ovvia, è la stessa che vale per il martello di un falegname: se lo strumento (il martello) viene usato per conficcare dei chiodi, è molto utile, se si cerca di utilizzarlo per avvitare delle viti, si ottiene un disastro.

Vale inoltre la pensa di ricordare che dovendo prendere delle decisioni (riguardo a certe scelte operative), se si dispone di informazioni, si può cercare di individuare la decisione migliore (o la migliore strategia di comportamento[1]), se invece non si dispone di nessuna informazione, allora si può solo tirare ad indovinare.

Maggiore è la quantità di informazioni disponibili (e di qualità elevata) e tanto più facile sarà ricercare la soluzione razionalmente migliore.

I modelli matematici, anche quando non evidenziano scelte immediatamente operative, contribuiscono a fornire informazioni che aiutano ad individuare le più razionali decisioni conseguenti.

Come per tutte le informazioni di cui si dispone, occorrerà valutare il loro livello di affidabilità e il loro grado di importanza.

## 2 – I vantaggi derivanti da un modello matematico

Indicheremo nel seguito i principali vantaggi derivanti dall'utilizzo di un modello matematico che

[1] In generale si parla di scelta, quando si tratta di effettuare una unica scelta tra più alternative disponibili (solitamente riferite ad un solo particolare problema), si parla invece di strategia quando le scelte da effettuarsi sono molte, tra loro correlate e distribuite nel tempo (solitamente con riferimento a questioni di più ampia portata).

Fulvio Francavilla
Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali
Università di Pavia, Italia

descriva, ad esempio, un problema di ottimo economico[2].

## 2.1 – *La costruzione del modello*

Si supponga, ad esempio, che l'utile finale associato ad un certo progetto possa essere misurato dalla funzione $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dove le variabili $x_i$, $i$=1,2, .. $n$, sono grandezze i cui valori possono essere stabiliti dall'operatore[3]. Occorrerà allora ricercare i valori numerici (ammissibili) da attribuire alle variabili citate (variabili di scelta) allo scopo di ottimizzare il valore che assumerà la funzione obiettivo $F$.
Occorrerà quindi esplicitare l'espressione numerica della funzione obiettivo $F$, formalizzare gli eventuali vincoli (solitamente espressi da equazioni, o da disequazioni) e risolvere numericamente il problema di ottimo così ottenuto. Si ottiene quindi, ad esempio, il seguente problema di ottimo[4]:

$$\begin{cases} \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n,}{\mathrm{Max}} \; \{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_h \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0 \end{cases}$$

dove:

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rappresenta la funzione obiettivo (da ottimizzare)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le variabili di scelta

$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_j$ (con $j = 1, 2, \ldots, h$) sono $h$ vincoli funzionali

$x_i \ge 0$ (con $i = 1, 2, \ldots, n$) sono i "vincoli di non negatività delle variabili".

Il solo fatto di volere formalizzare il problema nel modo sopra citato comporta la necessità di:
- dovere precisare in modo esatto l'obiettivo che si vuole ottenere, altrimenti non sarà possibile scrivere l'espressione della funzione obiettivo;[5]
- dovere individuare le variabili di scelta da prendere in considerazione ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), tralasciando quindi, ad esempio, le variabili poco importanti e concentrandosi invece su quelle maggiormente significative;[6]
- dovere indagare sulla presenza dei vincoli eventuali, e sulle modalità con cui essi agiscono, altrimenti non sarà possibile formalizzare i vincoli funzionali;[7]

---

[2] I problemi "di decisione" possono fare riferimento o alla individuazione della migliore alternativa tra tutte quelle disponibili, oppure alla ricerca dei valori numerici da attribuire a certe variabili (una, o più di una) allo scopo di massimizzare (o minimizzare) il valore assunto da una predefinita funzione obiettivo. Nel primo caso si parla solitamente di "problemi di scelta", nel secondo caso di "problemi di ottimo".

[3] Se i valori ammissibili non hanno limitazioni (se non quelli connessi con la definizione di esistenza delle espressioni matematiche considerate), si parla di "problemi liberi, o non vincolati", se invece i valori ammissibili sono solamente quelli che verificano certi condizioni, si parla di "problemi vincolati".

[4] I problemi di ottimo che si possono ottenere possono essere di vario tipo: lineari o non lineari, statici o dinamici, deterministici o aleatori, a una sola variabile o a più variabili, eccetera. A secondo del tipo di problema occorrerà poi utilizzare la procedura di risoluzione più appropriata.

[5] Si segnala che l'obiettivo che si intende conseguire è molto spesso presente nella mente dell'operatore in modo confuso e approssimativo. Con riferimento ad un progetto commerciale (di acquisto e successiva rivendita di prodotti) l'obiettivo sarà la massimizzazione dell'utile netto totale?. Oppure la massimizzazione dell'utile netto totale di lungo periodo?. Oppure sarà l'incremento della quota di mercato?, Oppure sarà l'incremento della quota di mercato, purché non si operi mai in perdita?. Oppure sarà la massimizzazione dell'utile netto relativo (rapportato quindi ai capitali investiti)?. Oppure sarà la massimizzazione dell'utile netto atteso (calcolato cioè in presenza di dati anche aleatori)?. Eccetera.

[6] Ricordate quella storia per cui se una farfalla batte le ali a Pechino, allora a New York si scatena una tempesta? Lasciamo pure stare la Teoria del Caos e i sistemi di equazioni differenziali, ma che "tutto si tiene, tutto si lega, tutto si intreccia" è faccenda spesso ricordata. In un sistema aziendale quasi ogni grandezza può influenzare le altre e quindi la citata funzione obiettivo $F$ dovrebbe dipendere da moltissima variabili di scelta (e anche da moltissime variabili di stato, che rappresentano quelle grandezze che non ricadono sotto il controllo dell'operatore, come, ad esempio, il tasso di inflazione, i prezzi stabiliti dalla concorrenza, eccetera). La espressione della funzione obiettivo $F$ risulterebbe estremamente complessa, talmente complessa da risultare (forse) del tutto inutilizzabile. Occorre allora individuare le variabili più significative, e solo su quelle operare.

[7] I vincoli presenti nel problema potrebbero fare riferimento alle modalità produttive, a vincoli di bilancio, a necessità interne, eccetera. I termini noti dei vincoli ($b_j$) rappresentano sovente le quantità

- dovere stabilire se sono presenti i vincoli di non negatività ($x_i \geq 0$), che comunque sono solitamente presenti in quasi tutti i problemi di tipo aziendale.[8]

Se si riesce a rappresentare (almeno decentemente) un problema aziendale mediante un modello matematico, allora ciò significa che il problema stesso è stato analizzato in dettaglio, precisando in modo esauriente: l'obiettivo, le variabili di scelta, le variabili di stato e i vincoli. Risulteranno quindi precisate le grandezze sulle quali agire, le risorse disponibili, le correlazioni tra le variabili, l'obiettivo che si vuole prendere in considerazione (di breve o di lungo periodo, strategico o tattico).
In poche parole il problema oggetto di esame sarà formalizzato in modo razionale e tutte le scelte ammissibili risulteranno definite. Come si diceva una volta, per tentare di risolvere un problema occorre prima capirlo, e quanto più lo si capisce (quanto meglio è bene formalizzato) e tanto più semplice sarà individuare la procedura risolutiva e isolare la soluzione ottima.

La sola corretta formulazione del problema (anche indipendentemente dall'ottenimento della connessa soluzione matematica) aiuta in modo consistente il decisore a ben operare nella efficiente gestione d'impresa.

## 2.2 – *La individuazione della soluzione matematica*

Impostato il modello matematico (che descrive, almeno nelle ipotesi qui adottate, un problema di ottimo) si tratta di individuare la soluzione numerica del problema di massimo (o di minimo). Come già segnalato, a secondo del tipo di problema (lineare o non lineare, statico o dinamico, deterministico o aleatorio, a una sola variabile o a più variabili, eccetera) converrà utilizzare una specifica procedura di risoluzione.[9]

La scelta della procedura matematica risolutiva ha quindi a che fare con la tipologia del problema, tipologia che deve necessariamente essere individuata.

A seconda che il problema oggetto di analisi sia, ad esempio, di tipo statico (una sola fase, con tutti i dati riferiti allo stesso istante: $t$=0), oppure di tipo dinamico (caratterizzato da una successione di fasi tra loro correlate, con valori riferiti di volta in volta agli istanti: $t_1$, $t_2$, …, $t_n$), si avranno procedure risolutive diverse (e soluzioni differenti), ma ci si dovrà necessariamente interrogare sulla natura del problema stesso e si dovrà inevitabilmente valutare se la questione che si sta analizzando può essere studiata con riferimento ad un solo periodo (problema statico, spesso con soluzione non eccessivamente difficile da individuare), o a una successione di scelte (problema dinamico, normalmente assai più difficile da risolvere). In poche parole (e ad esempio), dato un progetto, interessa solamente individuare la scelta operativa ottima per la situazione attuale, o ci si dovrà preoccupare anche degli effetti futuri?

Interesserà maggiormente guadagnare tanto subito (magari creando una pessima reputazione) o preoccuparsi della gestione ottimale anche per i periodi futuri?

Anche queste ulteriori precisazione circa il tipo e la natura del problema risultano utili (forse: indispensabili) a meglio comprendere le caratteristiche specifiche di quanto si intende analizzare (e a considerare in modo più approfondito la complessità delle possibili dinamiche aziendali).

## 2.3 – *L'analisi della soluzione matematica individuata*

Descritto (a parole) il problema, impostato il modello matematico, individuata la procedura risolutiva, ottenuta la soluzione numerica, si è percorso solo una parte del cammino necessario. La soluzione individuata va infatti "interpretata", nel senso che conviene capire per quale motivo la soluzione matematica fornita dal modello è quella, e non un'altra. Se, ad esempio, il prezzo (ottimo) di vendita da assegnare ad un certo prodotto risulta più basso di quanto ci si sarebbe aspettato, occorre chiedersi quale è il motivo di questa indicazione.

Potrebbe essere che così operando (basso prezzo di vendita) le quantità vendute aumentano in modo

---

disponibile di determinate risorse, o certi livelli (minimi, o massimi) che devono essere soddisfatti.

[8] Le variabili di scelta $x_i$ fanno riferimento a grandezze di tipo economico (il prezzo di vendita di un bene, l'ammontare investito in pubblicità, il numero degli addetti utilizzati per i rapporti con la clientela, eccetera). Per tali grandezze risulta normalmente banale osservare che eventuali valori negativi non avrebbero senso, vorrebbe infatti dire che si accetta di considerare, sempre ad esempio, un prezzo di vendita negativo (si vende il bene, e si danno dei soldi a chi lo ritira), oppure si decide di destinare ai rapporti con la clientela un numero di addetti inferiore a zero.

[9] Per i problemi lineari si fa solitamente ricorso al metodo del Simplesso di George Dantzig, per i problemi non lineari si utilizzano di norma le condizioni di primo e di secondo ordine sulle derivate della funzione obiettivo (distinguendo tra problemi a una o più variabili, liberi o vincolati, e tra ottimi interni o di frontiera), per i problemi di tipo dinamico può essere d'aiuto la programmazione di Bellman (o quella di Pontryagin).

considerevole, oppure che così facendo si contrastano adeguatamente i prezzi praticati dalla concorrenza, oppure che le economie di scala ottenibili compensano abbondantemente il minore incasso unitario, oppure che l'incremento della quota di mercato permetterà consistenti guadagni futuri, oppure che i maggiori volumi di merce trattata favorirà un incremento degli sconti (a nostro favore) che verranno praticati dai fornitori, eccetera.

Il modello matematico opera "razionalmente", trattando solo e unicamente i dati inseriti nel modello, ma fornendo precisione assoluta (indiscutibile) nelle risposte fornite.

Ogni soluzione individuata dal modello avrà quindi una sua spiegazione logica, spiegazione che occorre individuare e comprendere, sia per valutare l'affidabilità del modello, sia per meglio "ragionare" sulla completezza e validità del problema. La individuazione delle motivazioni che sono alla base della soluzione matematica permettono quindi, tra l'altro, di valutare il livello di affidabilità del modello matematico.

## 2.4 – *Analisi di post ottimalità*

Il problema è stato descritto e formalizzato, la soluzione matematica individuata e analizzata, ma quella trovata è la soluzione riferita al modello matematico caratterizzato dai dati (dai vincoli) originariamente inseriti.

I valori inizialmente assegnati alle grandezze che descrivono il modello vengono assunti sulla base del buon senso, o della situazione contingente, o della tradizione. Se, ad esempio, il budget massimo spendibile in pubblicità (nel periodo considerato) ammonta solitamente a diecimila euro, si sarà inserito nel modello matematico un vincolo per il quale la spesa pubblicitaria $S$ non potrà superare il limite prefissato ($S \leq 10.000$).

Ma se dall'analisi della soluzione matematica ottenuta dal modello si rileva che conviene investire in pubblicità tutte le risorse disponibili ($S = 10.000$), allora converrà provare a verificare cosa potrebbe accadere se tale limite venisse elevato.

Certo, occorrerà reperire altri fondi, magari indebitandosi e inserendo nel modello anche il costo del finanziamento, ma il risultato finale (il valore assunto dalla funzione obiettivo) potrebbe comunque migliorare. Si potrebbe allora operare riformulando il modello originario sulla base delle nuove considerazioni, ma questo dovrebbe essere fatto molte volte, modificando ogni volta i dati iniziali ipotizzando molti diversi scenari (operando anche su più grandezze contemporaneamente).

Molto più efficiente sarebbe riscrivere il modello trattando il valore massimo della spesa pubblicitaria ($S_{MAX}$) come se fosse una variabile del problema, il cui valore deve quindi essere ottimizzato. La prima soluzione matematica individuata risulta quindi essere più un punto di partenza, che un punto di arrivo. Sarà dall'analisi di questa (si veda il precedente punto 2.3) che si dovrebbe riuscire ad individuare quali modifiche apportare al problema (quali vincoli modificare, quali funzioni rettificare, quali variabili aggiungere) allo scopo di pervenire a una più efficiente gestione delle problematiche aziendali. Si parla spesso, con riferimento a quanto qui esposto, di "analisi di post-ottimalità".

## 2.5 – *L'affidabilità del modello*

Resta comunque la considerazione inizialmente espressa: la soluzione matematica individuata risolve in modo ottimale il problema descritto nel modello, ma tale problema non rappresenta quasi mai, al cento per cento, il reale problema economico.

Si ottiene quindi una soluzione matematicamente perfetta di un problema (quello descritto dal modello) che non è il vero problema.

Ne deriva una banale conseguenza: la soluzione matematica non sarà quasi mai immediatamente operativa, ma costituirà solamente un insieme di informazioni utili per formalizzare in modo più razionale le reali decisioni operative.

Altrettanto ovvio è che quanto più il modello matematico descrive adeguatamente il problema reale, tanto più la soluzione matematica individuata fornirà indicazioni importanti. Si tratta allora di valutare (in qualche modo) il livello di affidabilità del modello matematico.

Un possibile metodo per cercare di verificare la efficienza del modello consiste nel provare ad applicare la soluzione matematica individuata ad una situazione reale precedente.

Si considera, ad esempio, un progetto già realizzato in passato (sulla base di certe scelte), si sostituiscono alle scelte operate in passato quelle che il modello invece suggerisce e si confrontano i risultati realmente ottenuti con quelli che, per simulazione, si sarebbero prodotti.

Se i primi (risultati reali) risultano migliori dei secondi (risultati simulati) vuole dire che il modello matematico è stato costruito in modo non appropriato (ma la colpa non è del modello, è di chi lo ha formalizzato), in caso contrario l'utilizzo delle indicazioni fornite dal modello avrebbe consentito una migliore gestione operativa. Inutile forse osservare che il modello matematico perfetto è quello che riproduce senza differenza alcuna il problema reale, ma ciò è molto difficile a verificarsi. Si potrebbe allora concludere che conviene cercare di formalizzare il modello matematico in modo tale da essere il più possibile simile al problema reale, ma così non è.

Quanto più si cerca di fedelmente rappresentare il problema reale, tanto più aumentano il numero delle variabili da considerare, i vincoli da inserire, le espressioni da esplicitare, e il modello matematico diventa molto velocemente assai ampio, complesso, complicato, al punto tale da rendere estremamente difficile la sua analisi (a volte il livello di complessità risulta talmente elevato da impedire qualsiasi tipo di analisi dettagliata).

Normalmente conviene allora utilizzare modelli "adeguatamente"[10] idonei, in prima stesura anche abbastanza semplici (e quindi non molto attendibili), riservando sempre la possibilità (spesso inevitabile) di correggere man mano il modello modificando e integrando quanto ritenuto necessario. Vale una semplice regola operativa: meglio un modello matematico approssimato, ma discretamente funzionante, che un modello eccessivamente elaborato, del tutto inutilizzabile.

## 3 – Un semplice esempio

Mostriamo, a titolo di esempio, un modello matematico che fa riferimento ad un problema di gestione di un magazzino.

Si consideri un imprenditore che deve gestire la politica dei rifornimenti di merce al proprio magazzino individuando il volume ottimo di ogni "commessa"[11] allo scopo di massimizzare il ricavo netto conseguente alla commercializzazione dei beni trattati .

### 3.1 – *Modello base (iniziale)*

Indicando con :

- $C$ il costo unitario d'acquisto del bene trattato
- $V$ il ricavo unitario di vendita del bene trattato
- $y$ l'entità (certa) della domanda (uniformemente distribuita[12])
- $c$ il costo unitario (per unità di bene e di tempo) per mantenere la merce in magazzino[13]
- $K$ il costo fisso di consegna (per ognuna della commesse effettuate)
- $S$ il volume della commessa .

si ottiene il seguente problema "P/1", ove la funzione obiettivo $F_1(S)$, che fa riferimento al guadagno totale netto, deve essere massimizzata individuando il valore ottimo $S^*$ da assegnare al volume della commessa:

Problema P/1):

$$\begin{cases} \underset{S}{Max}\ \{F_1(S)\} = \underset{S}{Max}\left\{(V - C)\cdot(y) - \left[K \cdot \frac{(y)}{S} + c \cdot \frac{S}{2}\right]\right\} \\ 0 \le S \le y \end{cases}$$

Tale problema risulta risolto (analizzando le condizione di primo e di secondo ordine sulle derivate della funzione obiettivo) per:

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot y}{c}} \quad .$$

La soluzione fornita dal modello ($S^*$) massimizza quindi il guadagno totale netto, valutato utilizzando la funzione obiettivo $F_1$(S) sopra descritta.

Il tempo necessario per impostare e risolvere il problema P/1), che è un classico problema della "ricerca operativa", non supera i cinque minuti (disponendo dei dati iniziali).

Tale modello risulta però caratterizzato da numerose ipotesi semplificatrici, tra le quali: l'entità $y$ della domanda viene considerata di valore certo[14]; si fa riferimento ad un solo tipo di bene.

---

[10] Un modello iniziale può essere ritenuto "adeguato" solo sulla base di considerazioni soggettive, basate sul buon senso. Almeno tutte le principali grandezze devono essere presenti, almeno tutti i principali vincoli devono essere introdotti.

[11] Per "volume della commessa" si intende la quantità di beni che vengono immessi nel magazzino ad ogni rifornimento di merce.

[12] Domanda "uniformemente distribuita nel tempo" significa, in pratica, che la domanda giornaliera, ad esempio, sarà sempre la stessa (valore medio). Ovvio che nella realtà così non è, ma la semplificazione adottata (che permette anche di utilizzare valori di domanda non interi) risulta particolarmente utile ai fini dell'analisi e comporta ben pochi svantaggi operativi.

[13] Le componenti di costo connesse con il mantenimento della merce in magazzino possono fare riferimento, ad esempio, al naturale deterioramento dei materiali, all'obsolescenza economica, agli interessi passivi (anche figurativi) sui capitali immobilizzati, eccetera..

[14] Ipotizzare che la domanda $y$ sia di valore certo (noto a priori) è procedura sicuramente poco realistica, specie se riferita ad una attività di tipo commerciale (al massimo si potrebbe considerare un valore stimato, basato sull'esperienza passata o su altre considerazioni sensate), ma risulta assai meno azzardata se il magazzino in questione facesse riferimento allo stoccaggio intermedio di semi lavorati necessari ad una particolare processo produttivo, per quantità già definite.

### 3.2 – *Beni diversificabili in m diversi tipologie, domanda variabile con il volume della commessa*

Allo scopo di eliminare, almeno in parte, le ipotesi semplificatrici citate alla fine del paragrafo precedente, considereremo: a) che si faccia riferimento a *m* diversi beni; b).che la domanda *y*, riferita a ciascun tipo di bene, risulti influenzata dal volume *S* della commessa.

Contrassegnando allora ogni grandezza già precedentemente considerata con un indice *i*, scritto al pedice, per specificare che si sta facendo riferimento all'*i*-esimo tipo di bene, e ipotizzando che la quantità domandata *Y* sia data da un valore fisso *y* (stimato), incrementato da una componente (□*S*) che cresce all'aumentare del volume della commessa (e quindi: $Y_i = y_i + \sqrt{S_i}$ , con $i = 1, 2, \dots, m$), si ottiene il sotto indicato problema P/2):

Problema P/2):

$$\begin{cases} \underset{S_1,\dots,S_m}{Max} \left\{F_2(S_1,\dots,S_m)\right\} = \underset{S_1,\dots,S_m}{Max} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left\{ (V_i - C_i)\cdot\left(y_i + \sqrt{S_i}\right) - \left[ K_i \cdot \frac{\left(y_i + \sqrt{S_i}\right)}{S_i} + c_i \cdot \frac{S_i}{2} \right] \right\} \right\} \\ 0 \le S_i \le Y_i \qquad i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

La risoluzione matematica del problema P/2), cioè a dire la individuazione dei valori numerici da assegnare alle *m* variabili di scelta ($S_1$ , $S_1$ , … , $S_m$) comincia a presentare qualche difficoltà. Si dovrebbe calcolare e analizzare *m* derivate parziali prime (gradiente della funzione obiettivo $F_2$) e $m^2$ derivate parziali seconde (matrice Hessiana della funzione obiettivo $F_2$). In realtà, nel caso specifico si può osservare che si tratta di un problema con funzione obiettivo di tipo separabile[15] e che, di conseguenza, invece che trattare un unico problema in *m* variabili, si può più semplicemente risolvere *m* problemi in una sola variabile.

Senza addentrarci nella procedura risolutiva, sta di fatto che la risoluzione numerica del problema esposto (almeno per valori approssimati) può essere effettuata in un breve periodo di tempo (circa un'ora, per valori di *m* non troppo elevati).

Ragionando sul modello appena descritto si possono ora evidenziare due ulteriori considerazioni (tra le molte possibili): a) se per ogni tipo di bene si ha una specifica (e diversa) commessa ottima, allora diverse saranno le epoche dei rifornimenti di merce (con conseguente incremento delle spese totali di consegna); b) i volumi delle commesse potrebbero risultare globalmente troppo elevati, nel senso che si potrebbe non possedere i capitali necessari a reperire tutta la merce ipotizzata.

Conviene allora provare a modificare il modello utilizzato (complicandolo) inserendo quanto necessario a tenere conto delle ultime considerazioni segnalate.

### 3.3) *Beni diversificabili in m diversi tipologie, domanda variabile con il volume della commessa, stesse epoche di consegna dei differenti beni, vincolo sulle risorse totali inizialmente disponibili*

Se si vuole che per ogni diverso tipo di bene le commesse vengano tutte contemporaneamente eseguite, allora dovrà essere uguale, per ogni tipo di bene, il numero delle commesse da effettuarsi.

Indicando con $\bar{N}$ il numero totale dei rifornimenti al magazzino (ognuno dei quali prevederà la consegna di tutti i diversi tipi di bene, con un costo di consegna complessivo[16] pari a $\bar{K}$ ), si dovrà di conseguenza ottenere:

---

[15] I problemi di ottimo di "tipo separabile" vengono studiati, ad esempio, nell'ambito della "programmazione sequenziale" o della "programmazione dinamica". L'argomento non è dei più adatti ad essere riassunto in poche parole. Evidenziamo solo, in questa sede, che regola generale è che risulta più semplice risolvere tanti problemi piccoli, piuttosto che uno solo di dimensione consistente. Quando possibile si cerca quindi di frammentare il problema complesso nell'insieme di tanti problemi più ridotti (globalmente equivalenti al problema originario).

[16] Onde ottenere un risparmio sui costi di consegna congiunti occorre che sia: $\bar{K} < \sum_{i=1}^{m} K_i$ .

$$\frac{y_1+\sqrt{S_1}}{S_1}=\frac{y_2+\sqrt{S_2}}{S_2}=........=\frac{y_m+\sqrt{S_m}}{S_m}=\vec{N}$$

cioè a dire:

$$\vec{N}\cdot\left(\sqrt{S_i}\right)^2-\sqrt{S_i}-y_i=0$$

e quindi:

$$S_i=\left[\frac{1+\sqrt{1+4\cdot\vec{N}\cdot y_i}}{2\cdot\vec{N}}\right]^2 \quad , \quad i=1,2,\dots,m \ .$$

Per quanto riguarda il vincolo di bilancio (sui capitali disponibili per l'acquisto dei beni) si può inserire la condizione che il massimo spendibile per ogni commessa (pagamento di tutti beni acquistati e costo di consegna cumulativo) non possa superare un certo importo $P$

Si perviene quindi al seguente problema P/3):

Problema P/3):

$$\begin{cases} \underset{\overline{N}>0}{Max}\left\{F_3\left(\overline{N}\right)\right\}=\underset{\overline{N}>0}{Max}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(V_i-C_i\right)\cdot\left(y_i+\frac{1+\sqrt{1+4\cdot\overline{N}\cdot y_i}}{2\cdot\overline{N}}\right)-c_i\cdot\frac{\left[\frac{1+\sqrt{1+4\cdot\overline{N}\cdot y_i}}{2\cdot\overline{N}}\right]^2}{2}\right\}-\overline{K}\cdot\overline{N}\right\} \\ \sum_{i=1}^{m}\left\{C_i\cdot S_i\right\}+\overline{K}=\sum_{i=1}^{m}\left\{C_i\cdot\left[\frac{1+\sqrt{1+4\cdot\overline{N}\cdot y_i}}{2\cdot\overline{N}}\right]^2\right\}+\overline{K}\le P \end{cases}$$

Il problema sopra esposto, più completo rispetto ai precedenti, appare strutturalmente più complicato ma è in effetti di più semplice risoluzione in quanto le variabili di scelta non sono più date da: ($S_1$ , $S_1$ , … , $S_m$), ma dalla sola variabile $\vec{N}$, ottenuta la quale si possono ricavare i valori ottimi delle commesse per ogni tipo di bene: Nel caso poi in cui convenga utilizzare tutto il capitale disponibile $P$, come sovente avviene, la risoluzione risulta ulteriormente semplificata in quanto il vincolo di bilancio, invece che essere dato da una disequazione (….$\le P$), risulta essere una equazione (….$= P$).[17]

Per la risoluzione numerica del problema P/3), ma lo stesso vale anche per i problemi precedentemente esposti, è anche possibile utilizzare degli opportuni programmi di calcolo numerico (che possono essere installati su qualsiasi personal computer) e che permettono solitamente di ottenere le soluzioni numeriche dei problemi di ottimo in pochi secondi[18]

## 4 – Conclusioni.

L'utilizzo di modelli matematici per l'ottimizzazione della gestione aziendale non è né disastrosa, né indispensabile. Si tratta, come per qualsiasi tipo di analisi, di utilizzare con proprietà e con giudizio le informazioni (e i suggerimenti) che il

[17] Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange risulta anche possibile stimare la variazione della funzione obiettivo (utile netto totale) al variare delle risorse $P$.

[18] Si faccia però attenzione al fatto che un programma di calcolo numerico fornisce solitamente la prima soluzione accettabile che riesce a trovare, la quale potrebbe però individuare un ottimo relativo quando invece occorre ricercare l'ottimo assoluto. Inoltre il programma di calcolo si limita a restituire i valori numerici della soluzione individuata, senza fornire nessuna indicazione sulle motivazioni che hanno condotto ad individuare quella specifica soluzione. Una analisi "razionale" della soluzione individuata va quindi comunque effettuata.

modello fornisce. L'affidabilità delle informazioni ottenute tramite il modello matematico vanno quindi valutate, verificate e approfondite, ma mai ignorate. Sarà quindi compito dell'operatore farne un uso corretto ricordando che le scelte "razionali" implicano necessariamente conteggi, stime, calcoli e confronti (da effettuarsi in modo più, o meno, approfondito).

## References

Bellman R (1957), Dynamic Programming, *Princeton University Press.*

Cesari L (1983, Optimizations. Theory and Applications, *Springer-Verlag, New Tork*

Dantzig G. (1963), Linear Programming and extensions, *Princeton University Press, United Kingdom, Princeton Landmarks in Mathematics.*.

Francavilla F. (2011), Elementi di ottimizzazione matematica, *Società Editrice Esculapio, Bologna*

Pontryagin L., Boltyanskii V., Gamkrelize R., Mishenko E. (1962), "The Mathematical Theory of Optimal Process", *Wiley*.